

計画数理学特論

～第9回：不等式制約付き最適化～

担当：蓮池隆（経営システム工学科）
e-mail: thasuike@waseda.jp

本日の講義について

- 不等式制約付きの最適化問題を扱う

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{等式制約})$$

$$h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{不等式制約})$$

- 今回は, 不等式制約のみの最適化問題を考える. ($m < n$ は仮定)
- 関数 $f(\mathbf{x}), h_j(\mathbf{x})$ は微分可能とする

局所最適解・等式制約との関係性

- 不等式制約付きの最適化問題

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

- 上記の問題の局所最適解： \mathbf{x}^*

→ $h_j(\mathbf{x}^*) = 0$ を満たしているとすれば、該当する不等式制約を等式制約に変換しても、 \mathbf{x}^* は局所最適解のまま

$h_j(\mathbf{x}^*) < 0$ の場合は、該当する不等式制約がなかったとしても、 \mathbf{x}^* は局所最適解のまま

- すなわち、局所最適解 \mathbf{x}^* に対して、不等式制約の境界上($h_j(\mathbf{x}^*) = 0$)かそうでないか($h_j(\mathbf{x}^*) < 0$)によって、状況が変化する

有効制約式

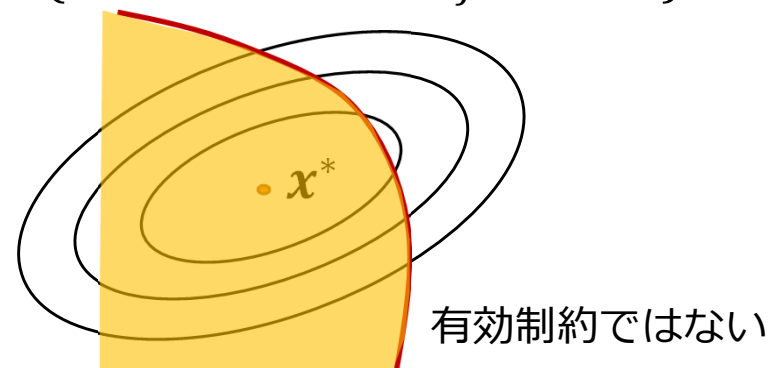
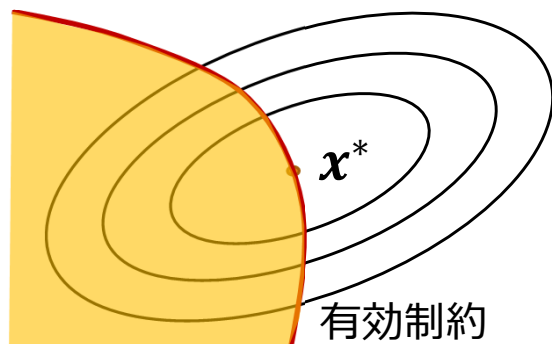
- 不等式制約付きの最適化問題

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

- 有効制約式(Active constraint)**

上記の問題の実行可能解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $h_j(\mathbf{x}) = 0$ となる制約式のこと

→ 有効制約式の添え字の集合: $I(\mathbf{x}) = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} | h_j(\mathbf{x}) = 0\}$



1次の最適性条件

- 不等式制約1つだけの場合の最適化問題

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } h_1(\mathbf{x}) \leq 0$$

- \mathbf{x}^* : 局所解 $\rightarrow \mathbf{x}^* \in B(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | h_1(\mathbf{x}) \leq 0\}$ で, $f(\mathbf{x}^*)$ は最小になる

① $h_1(\mathbf{x}^*) < 0$ のとき, \mathbf{x}^* の近傍の点はすべて $h_1(\mathbf{x}) < 0$

$$\rightarrow B(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | h_1(\mathbf{x}) \leq 0\} = B(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$$

$\rightarrow \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$ に対して, 制約なし最適化問題

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

に帰着. $\rightarrow \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$

1次の最適性条件

- 不等式制約1つだけの場合の最適化問題

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } h_1(\mathbf{x}) \leq 0$$

- \mathbf{x}^* : 局所解 $\rightarrow \mathbf{x}^* \in B(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_1(\mathbf{x}) \leq 0\}$ で, $f(\mathbf{x}^*)$ は最小になる

- ② $h_1(\mathbf{x}^*) = 0$ のとき, \mathbf{x}^* は

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad \text{subject to } h_1(\mathbf{x}) = 0$$

の局所最適解(これは等式制約の時の議論と同じ)

$$\rightarrow \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_1^* \nabla h_1(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\lambda_1^* \text{の符号が } \lambda_1^* \geq 0 \text{ になる点だけは注意})$$

1次の最適性条件

- 不等式制約1つだけの場合の最適化問題

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } h_1(\mathbf{x}) \leq 0$$

- \mathbf{x}^* : 局所解 $\rightarrow \mathbf{x}^* \in B(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_1(\mathbf{x}) \leq 0\}$ で, $f(\mathbf{x}^*)$ は最小になる
- まとめると...

$$\left. \begin{array}{l} h_1(\mathbf{x}^*) < 0 \text{ なら, } \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_1^* \nabla h_1(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \text{ で } \lambda_1^* = 0 \\ h_1(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ なら, } \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_1^* \nabla h_1(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \text{ で } \lambda_1^* \geq 0 \end{array} \right\}$$

1次の必要条件(**KKT条件**)

- 不等式制約付き最適化問題の局所最適解を \mathbf{x}^* とする.
- 有効制約となる $h_j(\mathbf{x}^*)$ における $\nabla h_j(\mathbf{x}^*), j \in I(\mathbf{x}^*)$ は1次独立とする.
- このとき, $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ が存在して,

が成り立つ. (**Karush-Kuhn-Tucker条件**, **KKT条件**)

1次の必要条件の求め方：例題

(例) KKT条件とそこから得られる解 (x, y, λ) を求めなさい.

$$\begin{aligned} & \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} x^2 + 6xy + y^2 \\ & \text{subject to } g_1(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

(解答)

2次の必要条件

- 不等式制約付き最適化問題の局所最適解を \mathbf{x}^* とする.
- 有効制約となる $h_j(\mathbf{x}^*)$ における $\nabla h_j(\mathbf{x}^*), j \in I(\mathbf{x}^*)$ は1次独立とする.
- $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$: KKT条件を満たす点
- 部分空間 $S = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_j(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{y} = 0, j \in I(\mathbf{x}^*)\}$
- ここで, $L = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^*)$ とするととき, 任意の $\mathbf{y} \in S$ に対して
$$\mathbf{y}^t L \mathbf{y} \geq 0$$

が成り立つ.

2次の十分条件

- \mathbf{x}^* , および $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ がKKT条件を満たす
- $J = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} \mid h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \lambda_j = 0\}$
- $S' = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_j(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{y} = 0, j \in J\}$
- 行列 L に対して, $\mathbf{y} \in S', \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ で $\mathbf{y}^t L \mathbf{y} > 0$ とする.
→ この時, \mathbf{x}^* は局所最適解である.

2次の十分条件：例題

(例)最適化問題

$$\begin{aligned} & \min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} x_1^4 + x_2^4 + 3x_1^2 x_2^2 - 2x_2^2 \\ & \text{subject to } g_1(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 - 2x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

凸最適化問題の場合

- 不等式制約付きの最適化問題

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$$

(凸最適化問題の場合における1次の十分条件)

- $f(\mathbf{x}), h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$: 凸関数 ($h_j(\mathbf{x})$ は1次式でなくてもよい)
- \mathbf{x}^* : 実行可能解
- この時, $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$, および \mathbf{x}^* がKKT条件を満たすとき, \mathbf{x}^* は上記の問題の大域最適解となる.

主問題と双対問題の関係性

- $f(\mathbf{x}), h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$: 凸関数
- ラグランジュ関数 $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ について,

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

- 不等式制約付き最適化問題は,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \text{subject to } \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

と表すことができる.

主問題と双対問題の関係性

- 主問題(primal problem)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L(x, \lambda) \\ \text{subject to } \lambda \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 双対問題(dual problem)

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) \\ \text{subject to } \lambda \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 主問題と双対問題の間には, 以下の弱双対性が成り立つ.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \geq \mathbf{0}} L(x, \lambda) \geq \max_{\lambda \geq \mathbf{0}} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) \quad (\text{弱双対性})$$

主問題と双対問題の関係性

- 主問題(primal problem)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L(x, \lambda) \\ \text{subject to } \lambda \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 双対問題(dual problem)

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) \\ \text{subject to } \lambda \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- $h_j(\tilde{x}) < 0$ を満たす \tilde{x} が存在するとき, 主問題と双対問題の間には, 強双対性が成り立つ.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \geq \mathbf{0}} L(x, \lambda) = \max_{\lambda \geq \mathbf{0}} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) \quad (\text{強双対性})$$

例題：線形計画問題の双対問題導出

- 主問題(primal problem)：線形計画問題

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ & \text{subject to } \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

今回のまとめ

- 不等式制約付きの最適化問題

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$$

について, 1次と2次の必要条件・十分条件を考察

- KKT条件は, 非線形最適化問題の中でも特に重要
- KKT条件は方程式を解く必要があるが, 方程式が複雑になった場合に解けない可能性がある
→ そのような場合にでも解ける方法を次回以降考える.