

計画数理学特論

～第8回：等式制約付き最適化～

担当：蓮池隆（経営システム工学科）

e-mail: thasuike@waseda.jp



今後の講義について

- ・ 制約付きの最適化問題を扱う

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{等式制約})$$

$$h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{不等式制約})$$

本日の講義について

- 制約付きの最適化問題を扱う

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{等式制約}) \\ & \quad \quad \quad h_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{不等式制約}) \end{aligned}$$

- 今回は, 等式制約のみの最適化問題を考える. ($p < n$ は仮定)
- 関数 $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x})$ は微分可能とする
- まず, 上記の最もシンプルな形として, 等式制約が1本だけの場合を考える

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } g_1(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

1次の最適性条件

- 等式制約1つだけの場合の最適化問題

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } g_1(\mathbf{x}) = 0$$

- \mathbf{x}^* : 局所解 $\rightarrow \mathbf{x}^* \in B(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) = 0\}$ で, $f(\mathbf{x}^*)$ は最小になる
- 実行可能解を変数 t を用いて $\mathbf{x}(t)$ とする. ただし, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*$ とする.

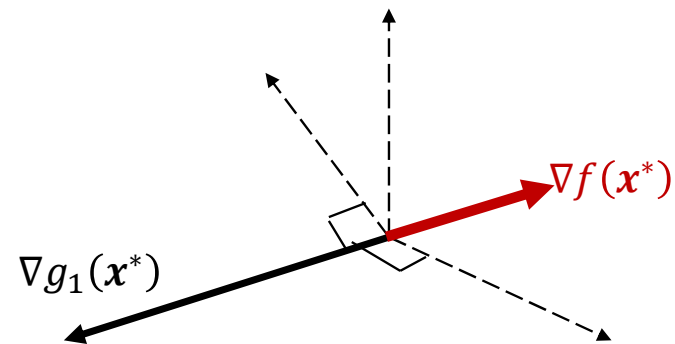
$$\rightarrow \mathbf{x}(t) \text{ は実行可能解なので, } g_1(\mathbf{x}(t)) = 0 \rightarrow \nabla g_1(\mathbf{x}^*)^t \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = 0$$

- $\nabla f(\mathbf{x}^*)^t \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = 0$ も成り立つ

\rightarrow

1次の最適性条件

-



- $\nabla g_1(x^*) \neq \mathbf{0}$ とすると \rightarrow

1次の必要条件

(これまでの内容を一般化：**1次の必要条件**)

- 等式制約付き最適化問題の局所最適解を x^* とする.
- $\nabla g_1(x^*), \nabla g_2(x^*), \dots, \nabla g_p(x^*)$ は1次独立とする.
- このとき, $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_p^* \in \mathbb{R}$ が存在して,

が成り立つ.

1次の必要条件の求め方

- 1次の必要条件を満たすパラメータ(x^*, λ^*)は,

の連立方程式の解とみなせる.

- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$: **ラグランジュ乗数**
- 上記の連立方程式から解を得る方法 : ラグランジュ未定乗数法
-

(1次の必要条件は, ラグランジュ関数の x での微分, λ での微分と等価)

1次の必要条件の求め方：例題

(例) 1次の必要条件から, (\mathbf{x}, λ) を求めなさい.

$$\begin{aligned} & \min_{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3} x_1 + x_2^2 \\ & \text{subject to } g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_3 = 0, g_2(\mathbf{x}) = x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

(解答)

2次の必要条件

- 等式制約付き最適化問題の局所最適解を \mathbf{x}^* とする.
- $\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \nabla g_2(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_p(\mathbf{x}^*)$ は1次独立とする.
- $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_p^* \in \mathbb{R}$: 1次の必要条件を満たすラグランジュ乗数
- 部分空間 $S = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{y} = 0, i = 1, 2, \dots, p\}$ を定義
- ここで, $L = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*)$ とするととき, 任意の $\mathbf{y} \in S$ に対して
$$\mathbf{y}^t L \mathbf{y} \geq 0$$
が成り立つ.

2次の十分条件

- x^* が $g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, p$ を満たし, さらに $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_p^* \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(x) = \mathbf{0}$$

とする. 2次の必要条件で定義される部分空間 S , 行列 L に対して,
 $y \in S, y \neq \mathbf{0}$ なら $y^t L y > 0$ とする. この時, x^* は局所最適解である.

2次の十分条件：例題

(例)最適化問題

$$\begin{aligned} \min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} & x_1^4 + x_2^4 + 3x_1^2 x_2^2 - 2x_2^2 \\ \text{subject to } & g_1(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 - 2x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

凸最適化問題の場合

- 等式制約付きの最適化問題($f(\mathbf{x})$ は凸関数)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^t \mathbf{x} - b_i = 0, i = 1, 2, \dots, p$$

(凸最適化問題の場合における1次の十分条件)

- $f(\mathbf{x})$ は凸関数, $g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^t \mathbf{x} - b_i$: 1次式
- \mathbf{x}^* : 実行可能解
- この時, $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_p^* \in \mathbb{R}$ が存在して, $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ となるなら, \mathbf{x}^* は上記の問題の大域最適解となる.

ミニマックス定理

- ラグランジュ関数 $L(x, \lambda)$ について,

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} L(x, \lambda) = \begin{cases} f(x) & (\mathbf{a}_i^t \mathbf{x} - b_i = 0, i = 1, \dots, p) \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

- 凸最適化問題は, $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} L(x, \lambda)$ と表現できる
- ここで, $L(x, \lambda) \geq \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) \leftrightarrow \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} L(x, \lambda) \geq \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$ となるので, **$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} L(x, \lambda) \geq \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$ (弱双対性)**
- さらに $f(x)$ が真凸関数で, 集合の境界部分以外に実行可能解をもち, 最適値が有限の時, **$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} L(x, \lambda) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$ (強双対性)**

今回のまとめ

- 等式制約付きの最適化問題

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

について, 1次と2次の必要条件・十分条件を考察

- 基本的なアイデアは, ラグランジュの未定乗数法(実は学部1年生の微積分で習っているはずの分野…)
- 不等式制約の場合はどうなるか…(これは次週)