

# 計画数理学特論 ～第4回：最適性条件～

---

担当：蓮池隆（経営システム工学科）  
e-mail: [thasuike@waseda.jp](mailto:thasuike@waseda.jp)

# 本日の講義について

---

- 非線形最適化の中でも、まず、制約なしの最適化問題を扱う

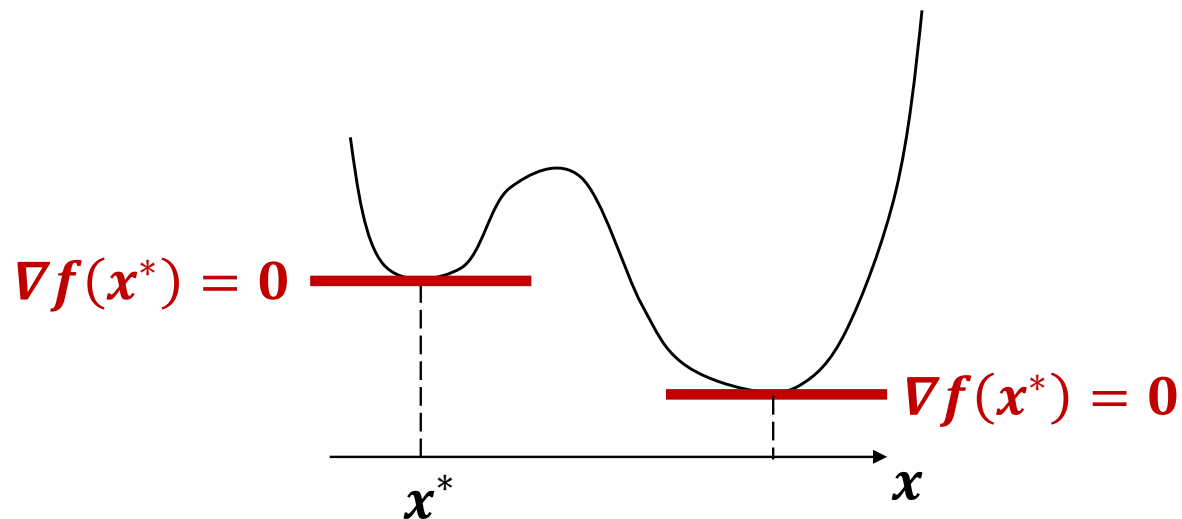
$$\text{(最適化問題P)} \quad \min f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

( $f(\mathbf{x})$ は一般的な関数で、凸関数とは限らない)

- **求めたいものは、 $f(\mathbf{x})$ の局所最適解** (凸関数であれば大域最適解になるが)
- 重要となるアイディアは、局所最適解を $\mathbf{x}^*$ として、
  - $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$  (1回微分)
  - $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \geq 0$  (2回微分)

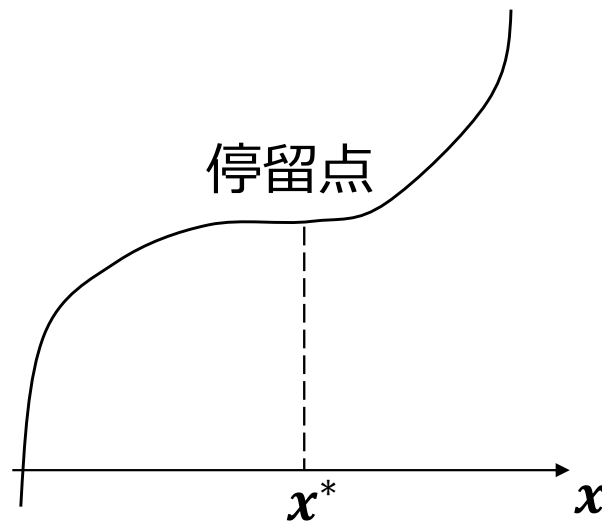
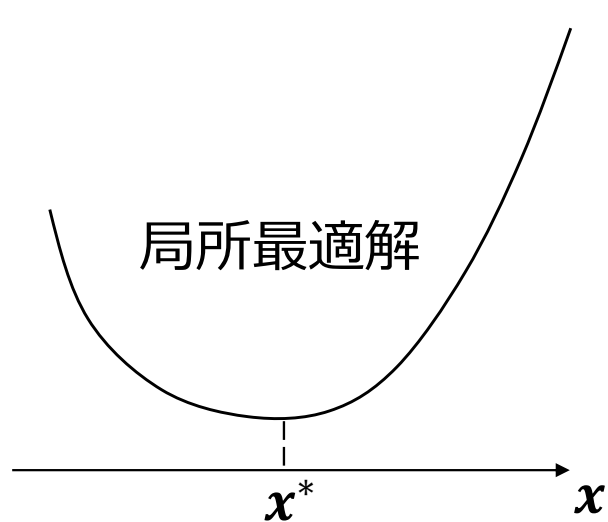
# 1次の必要条件

- 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は連続微分可能(1次だけ考えるなら, 1回微分ができればOK)
- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  : 制約なし最適化問題Pの局所最適解  
このとき,  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  (いわゆる微分して, =0の方程式を解く)



# $\nabla f(x^*) = 0$ の場合に起こること

- $\nabla f(x^*) = 0$ を満たす $x^*$  : 停留点
- 局所最適解と停留点の違い(イメージ)



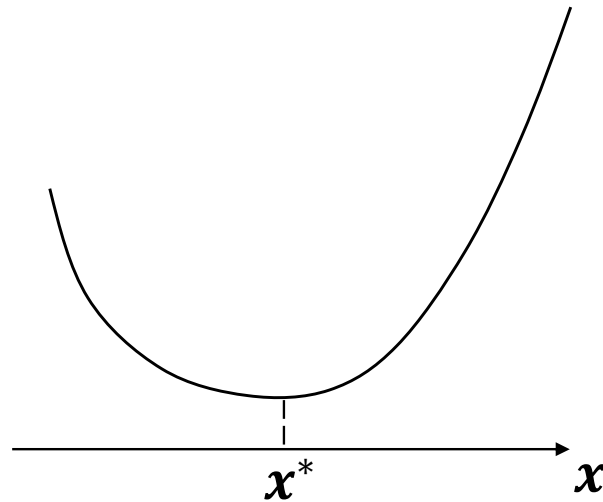
よって,  $\nabla f(x^*) = 0$   
ならば $x^*$ は局所最適解  
とは限らない

# 2次の必要条件

---

- 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は連続微分可能(2次なので, 2回微分ができればOK)
- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  : 制約なし最適化問題Pの局所最適解

このとき,  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}$  (いわゆる2回微分したら  $\geq 0$  (接線の傾きが単調増加))



## 2次の十分条件

---

- 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は連続微分可能(2次なので, 2回微分ができればOK)
- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  において,  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , かつ  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \succ \mathbf{0}$  が成り立つとする.

この時,  $\mathbf{x}^*$  は最適化問題Pの局所最適解である.

(つまり, 勾配が0で, 正定値( $\doteq \mathbf{x}^*$ で勾配が単調増加)であれば, その点 $\mathbf{x}^*$ は局所最適解になる)

## 練習問題①

---

- $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の最小化問題に対して、停留点を求め、その停留点が局所最適解かどうか判定しなさい。

(解答)

## 練習問題②

---

- $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x - 6y$ の最小化問題に対して, 停留点を求め, その停留点が局所最適解かどうか判定しなさい.

(解答)

# 1次の十分条件(凸関数の場合)

---

- 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は連続微分可能な凸関数
- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  において,  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  を満たすとする.  
このとき  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  : 制約なし最適化問題Pの大域最適解となる.

(証明)

# 集合制約がある場合の最適性条件

---

(最適化問題P')  $\min f(x)$  subject to  $x \in S$

## ・ 実行可能方向

- ・ ベクトル  $d \in \mathbb{R}^n$  が次の条件を満たすとき,  $d$  を  $x \in S$  における  $S$  の実行可能方向という

『

』

- ・  $S$  が凸集合なら, 任意の  $y \in S$  に対して,  $d = y - x$  は,  $x$  における  $S$  の実行可能方向である.

# $P'$ に対する1次の必要条件

---

- 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は連続微分可能(1次だけ考えるなら, 1回微分ができればOK)
- $S$ : 実行可能集合
- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ : 最適化問題  $P'$  の局所最適解

このとき,  $\mathbf{x}^*$  における  $S$  の任意の実行可能方向  $\mathbf{d}$  に対して

が成り立つ.

# $P'$ に対する1次の十分条件

---

- 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は連続微分可能な凸関数
- $S$  : 凸集合
- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  : 最適化問題  $P'$  の停留点  
このとき,  $\mathbf{x}^*$  は最適化問題  $P'$  の大域最適解である.

(証明は, 演習問題にします!)

# 今日の講義のまとめ

---

- 非線形最適化問題の最適性条件について解説
- 1回の微分, 2回の微分で方程式を解くことができれば, 今回の方法はかなり有用
  - 方程式が解けない場合(計算機で解く場合はこのパターンが多い)はどうすればよいのか?
  - 反復法・直線探索の利用